OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
SUCEAVA, 15 februarie 2015
BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE-CLASA a X-a

1. a) **(3p)** Să se arate că pentru orice numere reale *a,b* cu $a+b\geq 0$ are loc inegalitatea $4\left(a^3+b^3\right)\geq\left(a+b\right)^3$.

b) **(4p)** Numerele reale pozitive *x, y* satisfac relația $x+y=3\sqrt[3]{x+1}+3\sqrt[3]{y+3}$. Determinați valoarea maximă a sumei $x+y$.

Ion Bursuc, Suceava

Soluție. a) Inegalitatea este echivalentă cu:

$4a^3+4b^3\geq a^3+b^3+3ab\left(a+b\right)\Leftrightarrow a^3+b^3\geq ab\left(a+b\right)\Leftrightarrow\left(a+b\right)\left(a-b\right)^2\geq 0$, adevărat.

b) Dacă notăm $\sqrt[3]{x+1}=a$ şi $\sqrt[3]{y+3}=b\Rightarrow x=a^3-1$ şi $y=b^3-3$. Egalitatea din enunţ devine:

$a^3+b^3=3(a+b)+4\overset{a)}{\Rightarrow}4(a^3+b^3)=12(a+b)+16\geq(a+b)^3\Rightarrow(a+b)^3-12(a+b)-16\leq 0$

$\Leftrightarrow\left(a+b-4\right)\left(a+b+2\right)^2\leq 0\Leftrightarrow a+b\leq 4\Rightarrow x+y=a^3+b^3-4=3(a+b)\leq 12\Rightarrow x+y\leq 12$. În concluzie, valoarea maximă a sumei $x+y$ este 12. Maximul se atinge pentru $a=b=2,$ adică $x=7,y=5$.

Barem.

a) Demonstrația inegalității	3p
b) Demonstrează $x+y\leq 12$	3p
Finalizare valoarea maximă a sumei $x+y$ este 12 pentru $x=7,y=5$	1p

2. Dacă $a,b,c\in\left(1,+\infty\right),$ să se demonstreze: $\log_{ab^2c^2}a+\log_{bc^2a^2}b+\log_{ca^2b^2}c\geq\frac{3}{5}.$

G.M. 5/2007

Soluție. Inegalitatea se rescrie $\sum\frac{\lg a}{\lg a+2\lg b+2\lg c}\geq\frac{3}{5}\Leftrightarrow\sum\frac{x}{x+2y+2z}\geq\frac{3}{5},$ unde am notat $x=\lg a,y=\lg b,z=\lg c.$ Aplicând inegalitatea CBS obținem:

$$\sum\frac{x}{x+2y+2z}=\sum\frac{x^2}{x^2+2yx+2zx}\geq\frac{\left(x+y+z\right)^2}{x^2+y^2+z^2+4xy+4yz+4zx}.$$

În acest caz este suficient să demonstrăm $\frac{\left(x+y+z\right)^2}{x^2+y^2+z^2+4xy+4yz+4zx}\geq\frac{3}{5}\Leftrightarrow$

$5x^2+5y^2+5z^2+10xy+10xz+10yz\geq 3x^2+3y^2+3z^2+12xy+12xz+12yz\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\left(x-y\right)^2+\left(y-z\right)^2+\left(z-x\right)^2\geq 0$, inegalitate adevărată pentru orice numere reale *x,y,z*.

Egalitatea se realizează pentru $a=b=c.$

Barem.

Rescrie inegalitatea $\sum\frac{\lg a}{\lg a+2\lg b+2\lg c}\geq\frac{3}{5}\Leftrightarrow\sum\frac{x}{x+2y+2z}\geq\frac{3}{5},$	3p
Aplică CBS	2p
Finalizare	2p

3. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},f\left(x\right)=x+\log_3\left(1+3^x\right).$ Să se arate că:

a) **(5p)** Funcția *f* este inversabilă și $f^{-1}\left(x\right)<f\left(x\right),\forall x\in\mathbb{R}.$

b) **(2p)** $f\left(n\right)\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q},\forall n\in\mathbb{N}^*.$

***

Soluție. Demonstrăm că pentru orice număr real *y*, ecuația $f\left(x\right)=y$ are soluție unică $x\in\mathbb{R}.$

$f\left(x\right)=y\Leftrightarrow x+\log_3\left(1+3^x\right)=y\Leftrightarrow\log_3\left(3^x\left(1+3^x\right)\right)=y\Leftrightarrow 3^x\left(1+3^x\right)=3^y$, ecuație reductibilă la o ecuație de gradul al doilea cu soluția unică $x=\log_3\left(\frac{-1+\sqrt{1+4\cdot 3^y}}{2}\right)$. Deci funcția *f* este funcție bijectivă, în consecință și inversabilă. Observăm că *f* este sumă de funcții strict crescătoare, deci este funcție strict crescătoare.

În acest caz funcția inversă este strict crescătoare. Avem:
$\log_3\left(1+3^x\right)>0 \Rightarrow f\left(x\right)>x \Rightarrow f^{-1}\left(f\left(x\right)\right)>f^{-1}\left(x\right) \Rightarrow x>f^{-1}\left(x\right), \forall x\in\mathbb{R}$, de unde se obține concluzia.

b) Presupunem, prin reducere la absurd, că există cel puțin un număr natural nenul *n* astfel încât $f\left(n\right)\in\mathbb{Q}$,

deci există $p,q\in\mathbb{N}^*$ astfel încât $\log_3\left(1+3^n\right)=\dfrac{p}{q} \Leftrightarrow \left(1+3^n\right)^q=3^p \Rightarrow 3/1+3^n$, absurd.

Barem.

a) Demonstrează că f este funcție inversabilă	3p
Arată $f^{-1}\left(x\right)<f\left(x\right), \forall x\in\mathbb{R}$.	2p
b) Demonstrează cerința	2p

4. Fie a,b,c numere complexe distincte două câte două, având același modul. Să se arate că punctele de afixe a,b,c sunt vârfurile unui triunghi echilateral dacă și numai dacă $a^3\left(b-c\right)+b^3\left(c-a\right)+c^3\left(a-b\right)=0.$

***

Soluție. Considerăm punctele A, B și C de afixe *a, b,* respectiv *c.* Deoarece $|a|=|b|=|c|$, rezultă că centrul cercului circumscris triunghiului ABC este O, originea sistemului de coordonate. În acest caz afixul ortocentrului este $h=a+b+c.$ Relația din enunț este echivalentă cu:

$$\left(a^3b-b^3a\right)+\left(b^3c-a^3c\right)+c^3\left(a-b\right)=0 \Leftrightarrow \left(a-b\right)\left(ab\left(a+b\right)-c\left(a^2+ab+b^2\right)+c^3\right)=0 \Leftrightarrow$$

$$\left(a-b\right)\left(a^2b-a^2c+ab^2-abc+c^3-cb^2\right)=0 \Leftrightarrow \left(a-b\right)\left(b-c\right)\left(a^2+ab-cb-c^2\right)=0 \Leftrightarrow$$

$$\left(a-b\right)\left(b-c\right)\left(a-c\right)\left(a+b+c\right)=0 \Leftrightarrow \left(a+b+c\right)=0 \Leftrightarrow O=H \Leftrightarrow \triangle ABC \text{ echilateral.}$$

Barem

Centrul cercului circumscris are afix 0	1p
$h=a+b+c.$	1p
Demonstrează echivalența	5p

Notă: Orice altă soluţie corectă se va puncta corespunzător.